A- Exercice d'Algèbre

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère, pour $a, b, c \in \mathbb{R}, M = aI + bJ + cK$.

I-Calcul de M^n

I-1 Calculer $(bJ + cK)^2$ puis $(bJ + cK)^k$ pour $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$.

I-2 Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de I, J, K.

II-Calcul de M^{-n}

II-1 Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c \in \mathbb{R}$, pour que M soit inversible.

II-2 Dans ce cas, calculer M^{-1} puis M^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de I, J, K.

B- Problème d'Algèbre

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynomes de degré au plus 2 à coefficients réels et sa base canonique, $B = (1, X, X^2)$.
On considère $a, b, c \in \mathbb{R}, A \in E$, et $D(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$.
Pour $P \in E$. on appelle $\varphi(P)$ le reste de la division euclidienne de $A \times P$ par D. On remarquera que l'application φ dépend de D et de A, et est donc différente dans chaque partie du problème.

I-Nature de φ.

Montrer que φ est un endomorphisme de E.

II-Etude d'un cas particulier où D a trois racines simples.

Dans cette partie, $D(X) = X(X - 1)(X + 1)$ et $A(X) = X^2 + X + 3$.

II-1

II-1-a Effectuer la division euclidienne de $X^2 + X + 3$, de $X^3 + X^2 + 3X$, et de $X^4 + X^3 + 3X^2$ par $D(X)$.

II-1-b En déduire la matrice de φ dans la base B.

II-2

II-2-a Déterminer les valeurs propres de φ et une base de chaque sous-espace propre.

II-2-b φ est-elle diagonalisable?

II-3

II-3-a Montrer que $B' = ((X-1)(X+1), X(X+1), X(X-1))$ est une base de E.

II-3-b Déterminer la matrice de φ dans cette base.

III-Etude d'un cas particulier où D a une racine double.

Dans cette partie, $D(X) = X(X-1)^2$ et $A(X) = X^2 - 2X$.

III-1 Déterminer la matrice de φ dans la base B.

III-2

III-2-a Montrer qu'il existe trois polynomes de E, notés Q_1, Q_2, Q_3, qu'on déterminera tels que $\forall P \in E, P(X) = P(0)Q_1(X) + P(1)Q_2(X) + P'(1)Q_3(X)$ où P' désigne le polynome dérivé de P. (On pourra prendre successivement $P(X) = 1, P(X) = X$ et $P(X) = X^2$)

III-2-b Montrer que $B'' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.

III-2-c Déterminer la matrice de φ dans cette base.

IV-Etude d'un cas plus général où D a trois racines simples.

Dans cette partie, $D(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ avec $a < b < c$ et $A(X) = X^2+X+3$.

IV-1 Montrer que $B''' = ((X-b)(X-c), (X-a)(X-c), (X-a)(X-b))$ est une base de E.

IV-2

IV-2-a Montrer que les trois polynomes $(X-b)(X-c)$, $(X-a)(X-c)$, et $(X-a)(X-b)$ sont propres pour φ.

IV-2-b Déterminer la matrice de φ dans la base B'''.

IV-3 Déterminer en discutant suivant les valeurs de a, b, c les valeurs-propres de φ et une base de chacun des sous-espaces propres.

V-Etude du cas où A est du premier degré.

Dans cette partie, $D(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ et $A(X) = (X+\alpha)$.

V-1 Soit P un polynome propre de φ, montrer que P s'annule en a ou en b ou en c. (On pourra écrire la division euclidienne de $A \times P$ par D, dans laquelle on remplacera $\varphi(P)$ par λP)

V-2 En déduire que $A(a), A(b), A(c)$ sont des valeurs propres de φ.

V-3 On suppose de plus que $a < b < c$, montrer que φ est diagonalisable.

C- Exercice de Géométrie

Dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique: $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. Tous les tracés seront effectués dans le même repère avec une unité de 2 cm, $x \in [-1, 5]$, $y \in [-3, 3]$.

I-La courbe $\mathcal{C}$.

I-1 Etudier et tracer cette courbe.

I-2 Déterminer la nature de $\mathcal{C}$.

I-3 Déterminer son foyer F et sa directrice D qu'on tracera dans le même repère.

I-4 Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ en coordonnées polaires dans le repère $\left(F, \vec{I}, \vec{J}\right)$, avec $\vec{I} = -\vec{i}$, $\vec{J} = -\vec{j}$.

II-Etude en un point.

On appelle M_0 le point de C correspondant à la valeur t_0 du paramètre. Déterminer en M_0 :

II-1 L'équation de la tangente à la courbe.

II-2 L'équation de la normale à la courbe.

II-3 Le rayon de courbure.

II-4 Le centre de courbure noté N_0.

II-5 Pour $t_0 = \frac{1}{2}$, tracer sur le graphe la tangente et la normale à la courbe ainsi que le centre de courbure N_0.

III-Etude de l'ensemble des centres de courbure.

On appelle Γ l'ensemble des points N_0 quand t_0 décrit $\mathbb{R}$.

III-1 Déterminer une représentation paramétrique de Γ.

III-2

III-2-a Montrer que Γ possède un axe de symétrie.

III-2-b Montrer que Γ possède un point singulier. Quelle est sa nature?

III-2-c Etudier et tracer Γ.